

ภาคผนวก 8ก

แบบจำลองคณิตศาสตร์

แบบจำลองคณิตศาสตร์

แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณหาปริมาณน้ำที่สามารถสูบจากทะเลสาบจะประกอบด้วย 1) แบบจำลองอุทกวิทยา 2) แบบจำลองอุทกพลศาสตร์ และ 3) แบบจำลองคุณภาพน้ำ แบบจำลองอุทกวิทยาจะใช้คำนวณปริมาณน้ำท่า (Surface runoff) และน้ำใต้ผิวดิน (Subsurface flow) ที่ไหลลงสู่ทะเลสาบจากพื้นที่ลุ่มน้ำย่อยแต่ละลุ่มน้ำ ซึ่งจะสัมพันธ์กับปริมาณน้ำฝนและสภาพของแต่ละลุ่มน้ำย่อย แบบจำลองอุทกพลศาสตร์จะใช้คำนวณการไหลเวียนของน้ำและความลึกของน้ำในทะเลสาบที่ตำแหน่งต่างๆ ในเวลาต่างๆ ส่วนแบบจำลองคุณภาพน้ำจะใช้คำนวณการแพร่กระจายของค่าความเค็มของน้ำ

1. แบบจำลองอุทกวิทยา

ในการศึกษานี้ได้แบ่งพื้นที่ลุ่มน้ำทะเลสาบสงขลาออกเป็น 8 ลุ่มน้ำย่อย ประกอบด้วย 7 ลุ่มน้ำย่อยทางฝั่งตะวันตก และ 1 ลุ่มน้ำย่อยทางฝั่งตะวันออก แบบจำลองที่ใช้คำนวณปริมาณน้ำท่าในลุ่มน้ำย่อยทางฝั่งตะวันตกได้แก่แบบจำลอง Variable Infiltration Capacity 2 Layers (VIC-2L) ซึ่งพัฒนาโดย University of Washington และแบบจำลอง Routing ซึ่งพัฒนาโดย Lohmann *et al.* (1996) ส่วนการคำนวณปริมาณน้ำท่าจากลุ่มน้ำย่อยทางฝั่งตะวันออกได้ประเมินจากข้อมูลปริมาณน้ำฝนจากสถานีตรวจวัดน้ำฝนจำนวน 7 สถานีใน จ.สงขลา โดยประเมินว่า 30% ของปริมาณน้ำฝนจะถูกระบายเป็นน้ำท่าลงสู่ทะเลสาบ

2. แบบจำลองอุทกพลศาสตร์

2.1 สมการพื้นฐาน

แบบจำลองอุทกพลศาสตร์ที่เหมาะสมสำหรับทะเลสาบสงขลาได้แก่แบบจำลองแบบ 2 มิติตามแนวระนาบ สมการพื้นฐานของแบบจำลองนี้ได้แก่

สมการความต่อเนื่อง (continuity equation) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) = 0 \quad (1)$$

สมการโมเมนตัม (momentum equations) :

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + u \frac{\partial q_x}{\partial x} + v \frac{\partial q_x}{\partial y} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial x} + f q_y + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - \frac{1}{\rho} \tau_{bx} \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + u \frac{\partial q_y}{\partial x} + v \frac{\partial q_y}{\partial y} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial y} - f q_x + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - \frac{1}{\rho} \tau_{by} \quad (3)$$

เมื่อ η	เป็นระดับผิวน้ำวัดจากระดับความลึกเฉลี่ย
h	เป็นความลึกของน้ำ = $h_0 + \eta$ เมื่อ h_0 เป็นค่าความลึกเฉลี่ย
u	เป็นความเร็วของกระแสตามแนวแกน x
v	เป็นความเร็วของกระแสตามแนวแกน y
q_x	เป็นอัตราการไหลต่อหน่วยความกว้างตามแนวแกน x
q_y	เป็นอัตราการไหลต่อหน่วยความกว้างตามแนวแกน y
g	เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
P_a	เป็นความดันบรรยากาศ
ρ	เป็นความหนาแน่นของน้ำ
f	เป็น coriolis factor = $2 \Omega \sin \phi$ โดยที่ Ω เป็นความเร็วเชิงมุมของการหมุนของโลกและ ϕ เป็นค่า latitude
τ_{wx}, τ_{wy}	เป็น shear stress ที่ผิวน้ำตามแนวแกน x และ y
τ_{bx}, τ_{by}	เป็น shear stress ที่ท้องน้ำตามแนวแกน x และ y

2.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในที่นี้จะแสดงการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการพัฒนาแบบจำลองอุทกพลศาสตร์ โดยใช้เทคนิคแบบ Galerkin's Weighted Residual วิธีนี้จะแทนค่าตัวแปร h, q_x, q_y ในสมการพื้นฐานด้วยค่าโดยประมาณ ซึ่งเขียนในเทอมของค่าที่ Node ดังนี้

$$H = \sum_{i=1}^n \phi_i H_i \quad (4)$$

$$q_x = \sum_{i=1}^n \phi_i Q_{x_i} \quad (5)$$

$$q_y = \sum_{i=1}^n \phi_i Q_{y_i} \quad (6)$$

เมื่อ	n	เป็นจำนวน node ทั้งหมดที่กำหนดในพื้นที่ศึกษา
	ϕ_i	เป็น interpolation function
	H_i	เป็นค่าความลึก h ที่ node i
	Q_{xi}	เป็นค่าอัตราการไหล q_x ที่ node i
	Q_{yi}	เป็นค่าอัตราการไหล q_y ที่ node i

เมื่อแทนฟังก์ชันโดยประมาณลงในสมการพื้นฐานจะเกิดเศษเหลือ (residual) ขึ้น ทำการคูณ residual ด้วย function ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) แล้วให้อินทิกรัลของผลคูณทั่วพื้นที่เท่ากับ ศูนย์ จะได้สมการรวมทั้งสิ้น n สมการสำหรับสมการพื้นฐานแต่ละสมการ ซึ่งเท่ากับจำนวนตัวแปรที่ต้องการหาคำตอบทั้งหมด

ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะแบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อยหรือเอลิเมนต์ (element) โดยค่าตัวแปรภายในแต่ละพื้นที่ย่อยจะแสดงในเทอมของค่าตัวแปรที่ node ภายในพื้นที่ย่อยนั้นๆ ค่าอินทิกรัลของพื้นที่ศึกษาทั้งหมดจะคำนวณได้จากผลรวมของอินทิกรัลบนแต่ละพื้นที่ย่อย ซึ่งจะกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ในขั้นสุดท้ายสมการของระบบจะเขียนในรูปแบบดังนี้

$$M \frac{dH}{dt} + M_x Q_x + M_y Q_y = 0 \quad (7)$$

$$M \frac{dQ_x}{dt} + M_{ux} Q_x - M_f Q_y + M_x (H - H_0) - F_x = 0 \quad (8)$$

$$M \frac{dQ_y}{dt} + M_{vy} Q_y + M_f Q_x + M_y (H - H_0) - F_y = 0 \quad (9)$$

โดยที่เมตริกซ์ M , M_x , M_y , M_{ux} , M_{vy} , M_f , F_x และ F_y ได้จากการรวม (assemble) เมตริกซ์ของเอลิเมนต์ (element matrices) M^e , M_x^e , M_y^e , M_{ux}^e , M_{vy}^e , M_f^e , F_x^e และ F_y^e ตามลำดับ โดยที่

$$M^e = \iint_A \phi^e \phi^{eT} dA \quad (10)$$

$$M_x^e = \iint_A (\phi^e \partial \phi^{eT} / \partial x) dA \quad (11)$$

$$M_y^e = \iint_A (\phi^e \partial \phi^{eT} / \partial y) dA \quad (12)$$

$$M_{ux}^e = \iint_A (\phi^e \phi^{eT} u^e \partial \phi^{eT} / \partial x) dA + \iint_A (\phi^e \phi^{eT} v^e \partial \phi^{eT} / \partial y) dA + \iint_A J^e \phi^e \phi^{eT} dA \quad (13)$$

$$M_{vy}^e = \iint_A (\phi^e \phi^{eT} u^e \partial \phi^{eT} / \partial x) dA + \iint_A (\phi^e \phi^{eT} v^e \partial \phi^{eT} / \partial y) dA + \iint_A J^e \phi^e \phi^{eT} dA \quad (14)$$

$$M_f^e = \iint_A f^e \phi^e \phi^{eT} dA \quad (15)$$

$$F_x^e = \iint_A W_x^e \phi^e dA + \iint_A \{ (h/\rho) (\phi^e \partial \phi^{eT} / \partial x) P_a \} dA \quad (16)$$

$$F_y^e = \iint_A W_y^e \phi^e dA + \iint_A \{ (h/\rho) (\phi^e \partial \phi^{eT} / \partial y) P_a \} dA \quad (17)$$

$$J^e = g \{ (u^2 + v^2)^{1/2} / (h \cdot C_h^2) \} \quad (18)$$

$$W_x^e = \tau_{wx} / \rho \quad (19)$$

$$W_y^e = \tau_{wy} / \rho \quad (20)$$

2.3 รูปแบบของเอเลเมนต์ที่ใช้

ในที่นี้ได้ใช้เอเลเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่มี interpolation function เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งเมื่อแทนฟังก์ชันดังกล่าวลงในสมการที่ (10) ถึง (17) จะหาค่าเมตริกซ์ของแต่ละพื้นที่ย่อย (element matrices) ได้ ซึ่งเมื่อนำมา assemble รวมเข้าด้วยกัน จะได้เมตริกซ์ของระบบ (system matrices)

2.4 การหาคำตอบของสมการ

สมการที่ (7), (8) และ (9) สามารถเขียนในรูปแบบง่ายๆ ได้ดังนี้

$$M \frac{dH}{dt} = F_h(Q_x, Q_y) \quad (21)$$

$$M \frac{dQ_x}{dt} = F_u(H, Q_x, Q_y) \quad (22)$$

$$M \frac{dQ_y}{dt} = F_v(H, Q_x, Q_y) \quad (23)$$

ในที่นี้ได้ใช้วิธีคำนวณโดยการแบ่งช่วงเวลา Δt ออกเป็น 2 ช่วง ช่วงแรกจะคำนวณหา ค่า $H^{t+\Delta t}$ จากค่า H^t และ $Q_x^{t+\Delta t/2}$ และ $Q_y^{t+\Delta t/2}$ จากนั้นจึงคำนวณหา ค่า $Q_x^{t+3\Delta t/2}$ และ $Q_y^{t+3\Delta t/2}$ ที่ ช่วงเวลาที่สอง โดยอาศัยค่า $H^{t+\Delta t}$ และ $Q_x^{t+\Delta t/2}$ และ $Q_y^{t+\Delta t/2}$

2.5 การพัฒนาโปรแกรมคำนวณ

หลังจากที่ได้พัฒนาสมการไฟไนท์เอเลเมนต์ และวิธีหาคำตอบของสมการดังกล่าว ข้างต้น ผู้ศึกษาได้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเพื่อช่วยการคำนวณ โดยใช้ภาษา FORTRAN 92

2.6 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

แบบจำลองที่พัฒนา ขึ้นได้ผ่านการตรวจสอบความถูกต้องโดยประยุกต์ใช้คำนวณ การไหลของน้ำในลำรางที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอ และเปรียบเทียบผลการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง กับคำตอบที่ถูกต้องที่ได้จากการแก้สมการโดยใช้วิธีทางแคลคูลัส ซึ่งพบว่าคำตอบจากวิธีทั้งสองมี ค่าใกล้เคียงกัน

3. แบบจำลองคุณภาพน้ำ

3.1 สมการพื้นฐาน

แบบจำลองคุณภาพน้ำที่เหมาะสมกับทะเลสาบสงขลาได้แก่แบบจำลองแบบ 2 มิติ ตามแนวระนาบ สมการพื้นฐานสำหรับแบบจำลองนี้ได้แก่สมการสมดุลของมวลสาร (mass balance equation) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h K_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h K_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right\} + K \cdot c - R_c = 0 \quad (24)$$

เมื่อ	c	เป็นค่าความเข้มข้น ณ ตำแหน่ง (x, y) ที่เวลา t
	u	เป็นความเร็วตามแนวแกน x
	v	เป็นความเร็วตามแนวแกน y
	h	เป็นความลึกของน้ำ
	K_x, K_y	เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย
	K	เป็นอัตราการสลายตัวของสาร
	R_c	เป็นอัตราการเกิดขึ้นของมลสารต่อหน่วยปริมาตรน้ำ

3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในที่นี้ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการพัฒนาแบบจำลองคุณภาพน้ำ โดยแทนค่าตัวแปร c ในสมการพื้นฐานด้วยค่าโดยประมาณ ซึ่งเขียนในเทอมของค่าที่ node ดังนี้

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^n \phi_i C_i \quad (25)$$

ในขณะเดียวกัน ค่า parameters u และ v ก็แทนด้วยค่าที่ node โดยใช้สมการลักษณะเดียวกัน ดังนี้

$$u = \sum_{i=1}^n \phi_i U_i \quad (26)$$

$$v = \sum_{i=1}^n \phi_i V_i \quad (27)$$

เมื่อแทนฟังก์ชันโดยประมาณนี้ลงในสมการพื้นฐานจะเกิดเศษเหลือ (residual) ขึ้น ทำการคูณ residual ด้วย function ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) แล้วให้อินทิกรัลของผลคูณทั่วพื้นที่เท่ากับศูนย์ จะได้สมการรวมทั้งสิ้น n สมการสำหรับสมการพื้นฐานแต่ละสมการ ซึ่งเท่ากับจำนวนตัวแปรที่ต้องการหาคำตอบทั้งหมด

ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะแบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อยหรือเอลิเมนต์ (element) โดยค่าตัวแปรภายในแต่ละพื้นที่ย่อยจะแสดงในเทอมของค่าตัวแปรที่ node ภายในพื้นที่ย่อยนั้นๆ ค่าอินทิกรัลของพื้นที่ศึกษาทั้งหมดจะคำนวณได้จากผลรวมของอินทิกรัลบนแต่ละพื้นที่ย่อย ซึ่งจะกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ในขั้นสุดท้ายสมการของระบบจะเขียนในรูปแบบดังนี้

$$M \frac{dC}{dt} + M_c C - M_r = 0 \quad (28)$$

โดยที่เมตริกซ์ M , M_c และ M_r ได้จากการรวม (assemble) เมตริกซ์ของเอลิเมนต์ (element matrices) M^e , M_c^e และ M_r^e ตามลำดับ โดยที่

$$M^e = \iint_A \phi^e \phi^{eT} dA \quad (29)$$

$$\begin{aligned} M_c^e = & \iint_A (\phi^e \phi^{eT} u^e \partial \phi^{eT} / \partial x) dA + \iint_A (\phi^e \phi^{eT} v^e \partial \phi^{eT} / \partial y) dA + \iint_A K^e \phi^e \phi^{eT} dA \\ & - (K_x / h) \iint_A \{ \phi^e (\partial \phi^{eT} H^e / \partial x) (\partial \phi^{eT} / \partial x) \} dA - (K_y / h) \iint_A \{ \phi^e (\partial \phi^{eT} H^e / \partial y) (\partial \phi^{eT} / \partial y) \} dA \\ & + K_x \iint_A \{ (\partial \phi^e / \partial x) (\partial \phi^{eT} / \partial x) \} dA + K_y \iint_A \{ (\partial \phi^e / \partial y) (\partial \phi^{eT} / \partial y) \} dA \end{aligned} \quad (30)$$

$$M_r^e = \iint_A R^e \phi^e dA + \int_S q_c^e \phi^e dS \quad (31)$$

3.3 รูปแบบของเอลิเมนต์ที่ใช้

ในที่นี้ได้ใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่มี Interpolation function เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งเมื่อแทนฟังก์ชันดังกล่าวลงในสมการที่ (29) ถึง (31) จะหาค่าเมตริกซ์ของแต่ละพื้นที่ย่อย (element matrices) ได้ ซึ่งเมื่อนำมา assemble รวมเข้าด้วยกัน จะได้เมตริกซ์ของระบบ (system matrices)

3.4 การหาคำตอบของสมการ

เมื่อกำหนดค่า C ที่เวลาเริ่มต้น สามารถคำนวณหาค่า C ที่เวลาถัดไปได้จาก

$$C^{t+\Delta t} = \left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{M_c}{2} \right]^{-1} \left\{ \left[\frac{M}{\Delta t} - \frac{M_c}{2} \right] C^t + M_r \right\} \quad (32)$$

3.5 การพัฒนาโปรแกรมคำนวณ

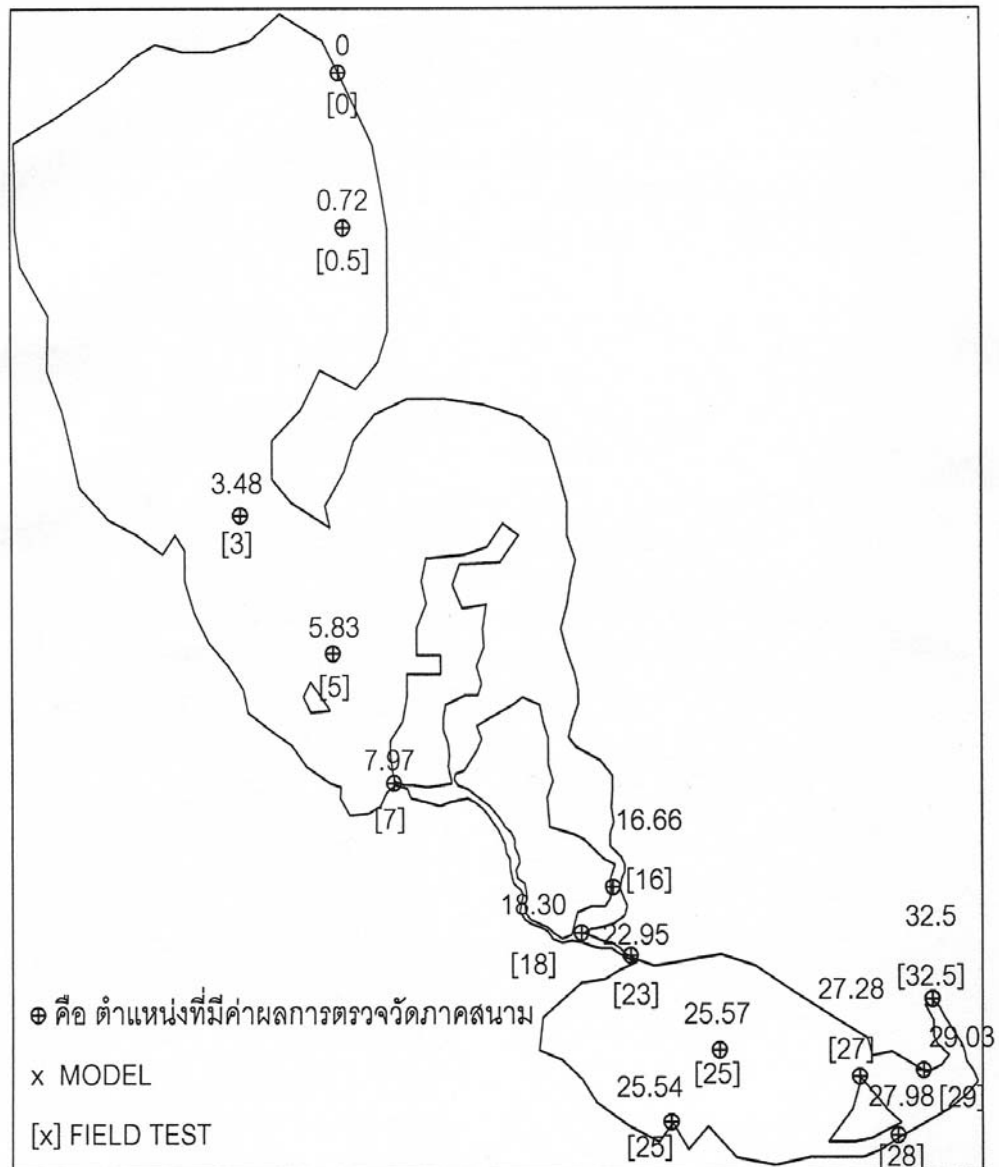
หลังจากที่ได้พัฒนาสมการไฟไนท์เอเลเมนต์ และวิธีหาคำตอบของสมการดังกล่าวข้างต้น ผู้ศึกษาได้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเพื่อช่วยการคำนวณ โดยใช้ภาษา FORTRAN 92

3.6 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

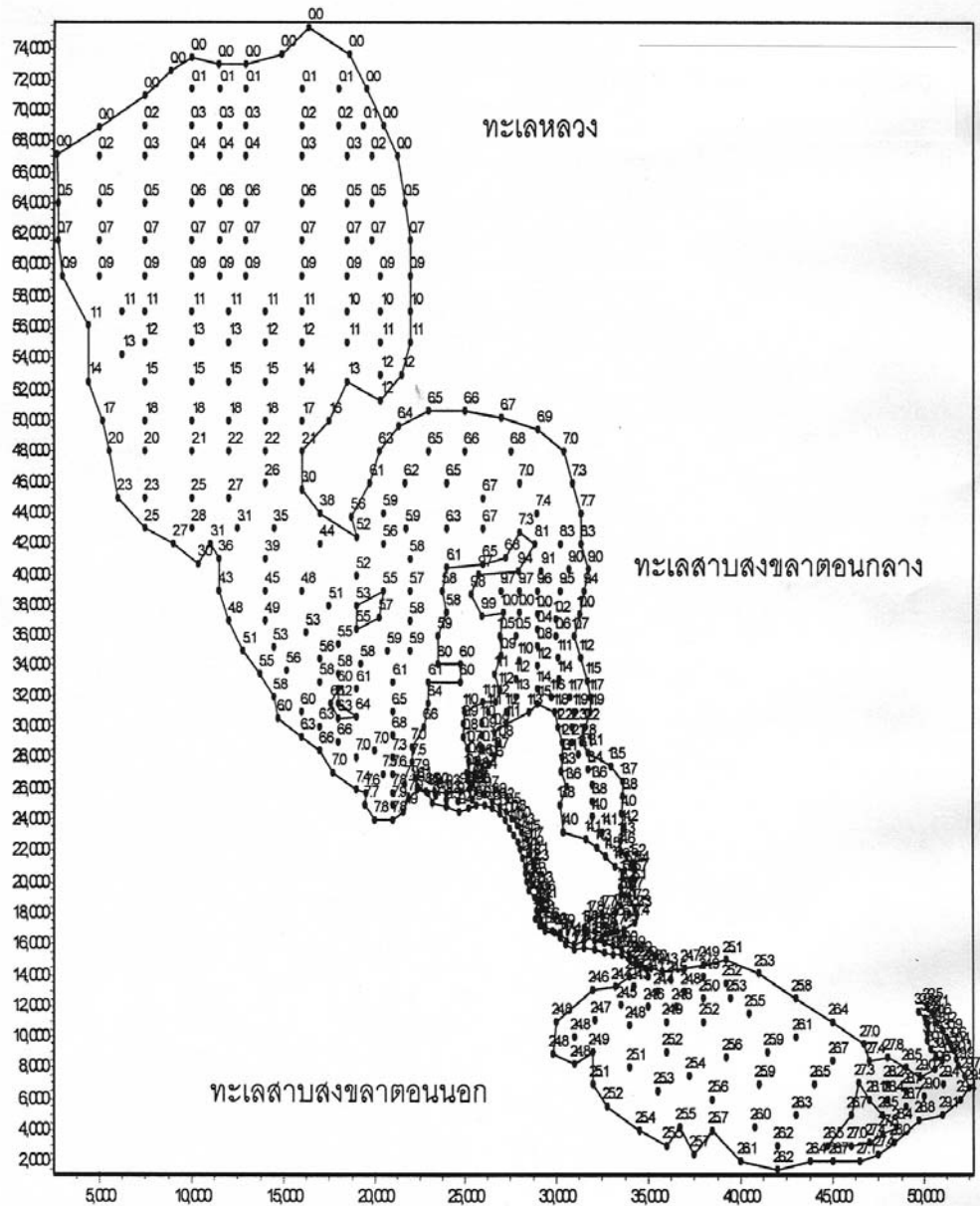
หลังจากได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณแล้ว ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้อง โดยประยุกต์ใช้คำนวณการแพร่กระจายของสารในลำรางที่มีหน้าตัดและความเร็วของน้ำคงที่ และเปรียบเทียบผลการคำนวณโดยใช้แบบจำลองกับคำตอบที่ถูกต้องที่ได้จากการแก้สมการโดยใช้วิธีทางแคลคูลัส ซึ่งพบว่าคำตอบจากวิธีทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน

4. ตัวอย่างการคำนวณด้วยแบบจำลอง

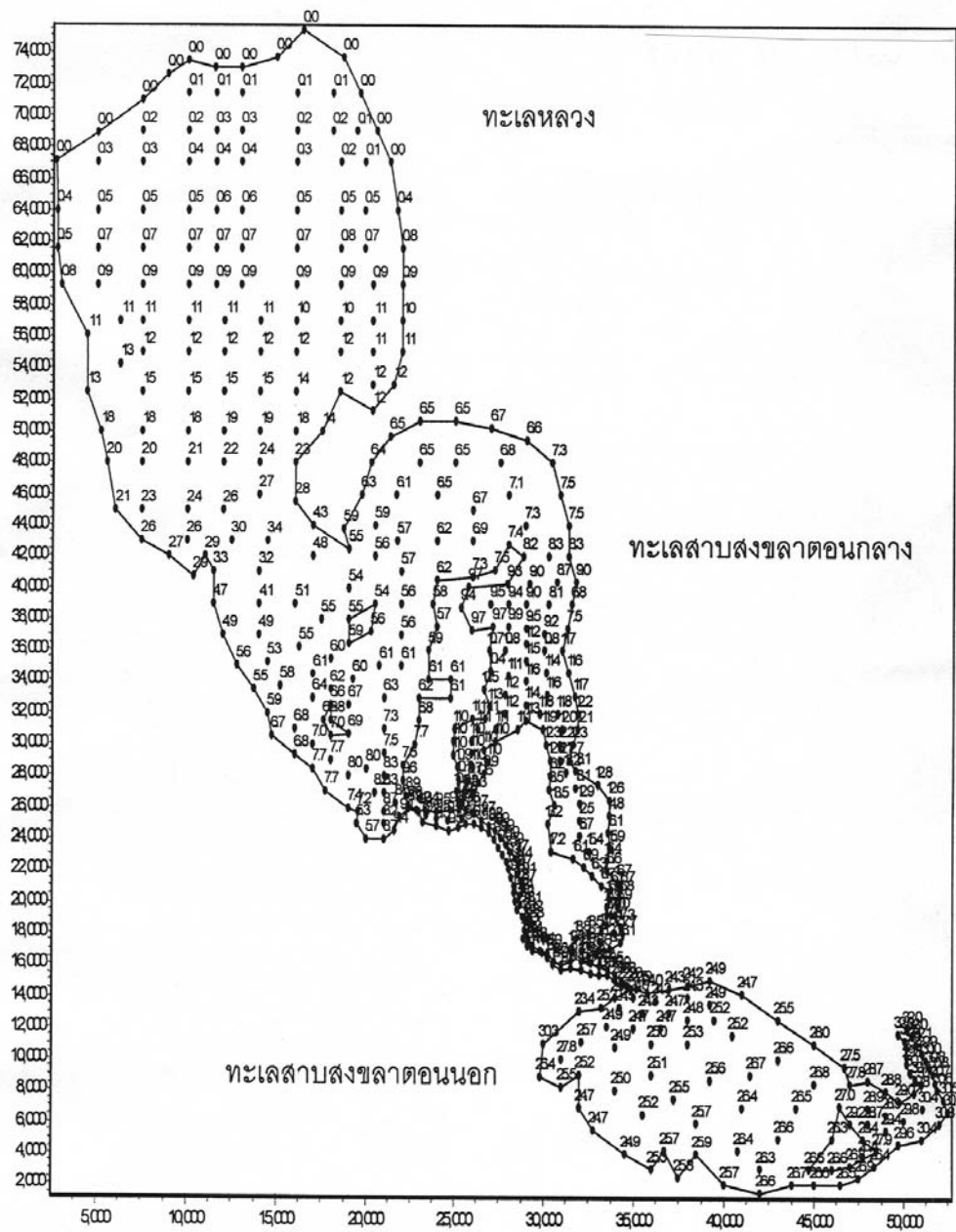
ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างการคำนวณการแพร่กระจายของค่าความเค็มในทะเลสาบสงขลา รูปที่ 8ก.1 แสดงการแบ่งพื้นที่ศึกษาเป็นพื้นที่ย่อยรูปสามเหลี่ยม (Triangular element) ซึ่งมีจำนวนรวม 754 สามเหลี่ยม และมีจำนวน node รวม 530 node เมื่อป้อนข้อมูลพิกัดของ node ต่างๆ ความลึก ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานท้องน้ำ (Chezy Coefficient) ปริมาณน้ำท่าที่ระบายจากแต่ละลุ่มน้ำย่อย ระดับน้ำทะเลขึ้นลงที่ปากทะเลสาบ และอัตราการสูบน้ำที่สถานีสูบน้ำก็จะสามารถคำนวณความเร็วของกระแสและความลึกที่ node ต่างๆ ได้จากแบบจำลองอุทกพลศาสตร์ เมื่อนำผลการคำนวณดังกล่าวมาป้อนเข้าแบบจำลองคุณภาพน้ำ พร้อมกับข้อมูลความเค็มที่ปากทะเลสาบก็จะสามารถคำนวณการกระจายค่าความเค็มของน้ำในทะเลสาบได้



รูปที่ 8ก.2 ผลการเปรียบเทียบแบบจำลอง



รูปที่ 8ก.3 ผลการคำนวณค่าความเค็มในขณะที่สถานีสูบน้ำเริ่มเดินเครื่อง



รูปที่ 8ก. 4 ผลการคำนวณค่าความเค็มเมื่อทำการสูบน้ำในอัตรา 100,000 ลบ.ม./ชม.
ต่อเนื่องเป็นเวลา 6 ชม.